جامعة البعث — سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢) — المدة : ساعة و نصف

كلية العلوم — امتحانات الدورة الاضافية (مرسوم) ٢٠١٤-٢٠١٥ — العلامة:(١٠٠) درجة

قسم الرياضيات — لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

جواب السؤال الأول (٢٠ درجة):

لتكن M مجموعة شبه متراصة في الفضاء الخطي المنظم X ولنفرض جدلاً أنها غير محدودة ، عندئذٍ توجد متتالية من عناصر M ولتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تحقق $n=1,2,..$ ، $\|x_n\|>n$ ولكن M شبه متراصة فرضاً وبالتالي توجد في المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة ولتكن $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ وهذا تناقض مع $n=1,2,..$ ، $\|x_n\|>n$ وهو المطلوب .

الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدودة هي شبه متراصة ، وخاصة إذا كان الفضاء غير منتهي الأبعاد يبينه المثال الآتي :

في الفضاء $X=\ell_2$ لدينا المجموعة $M=\{e_1,e_2,...\}$ حيث $e_1=(1,0,0,...)$ و $e_2=(0,1,0,...)$ وهكذا ، واضح أن هذه المجموعة محدودة لأن $k=1,2,...$ ، $\|e_k\|=1$ ولكن هذه المجموعة ليست شبه متراصة لأن :

$$k,i=1,2,... \quad , \quad \|e_k-e_i\|^2=2=\|e_k\|^2+\|e_i\|^2 \text{ وبالتالي فإن } \|e_k-e_i\|\longrightarrow\sqrt{2}\neq 0$$

وذلك أياً كان $k,i=1,2,...$ ، أي أنه لا يمكن الحصول على متتالية جزئية متقاربة من المتتالية M (لأنها ليست متتالية أساسية وبالتالي ليست متقاربة) .

جواب السؤال الثاني (٢٠ درجة) :

ليكن لدينا $c>0$ وبالتالي $\forall x=(\xi_1,\xi_2,...)\in\ell_2$ ، $c=1$ ، $\|A_nx\|_{\ell_2}\leq c\|x\|_{\ell_2}$ فالمؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ، وبما أن المؤثر $x\neq 0\in X$ ينقل كل مجموعة محدودة M في ℓ_2 المنطلق إلى مجموعة $A_n(M)$ محدودة في فضاء منتهي البعد ($\ell_2^{(n)}$ الإيزومورفي مع C^n) وحسب مبرهنة تكون هذه المجموعة $A_n(M)$ شبه متراصة إذن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متراصة .

نهاية هذه المتتالية $\lim\limits_{n\to\infty} A_nx=\lim\limits_{n\to\infty}(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,0,...)=(\xi_1,\xi_2,...)=x=Ix$ وبما أن المؤثر I غير متراص في الفضاء غير المنتهي البعد (لاحظ أن تقارب المتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر I هو تقارب نقطي وليس بانتظام لذلك المبرهنة (إذا كان X فضاءً خطياً منظماً و B فضاء باناخ ،

وكانت $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من المؤثرات الخطية المتراصة حيث $A_n : X \to B$ وبفرض أن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة (بانتظام) من مؤثر A عندئذٍ A متراص) لم تنطبق .

في هذا المثال لوجدنا أن : $\|x\|_{\ell_2} = \|(I-A_n)x\|_{\ell_2}$ وبالتالي :

$$\|I-A_n\|_{\ell_2} = \sup_{\substack{x\neq\theta \\ x\in\ell_2}} \frac{\|(I-A)x\|_{\ell_2}}{\|x\|_{\ell_2}} = 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ولذلك قلنا إن التقارب نقطي وليس بانتظام.

جواب السؤال الثالث (٢٠ درجة):

بما أن A^{-1} موجود وخطي ومحدود عندئذٍ فإن $\lambda = 0 \notin \sigma(A)$ وبالتالي كل عدد $\lambda\in\sigma(A)$ يمكن كتابته بالشكل $\lambda = \frac{1}{\mu}$ حيث μ عدد مناسب ومغاير للصفر . لنثبت صحة التكافؤ :

$$\mu\notin\sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu}\notin\sigma(A^{-1})$$

بفرض $\frac{1}{\mu}\notin\sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \left(A^{-1}-\frac{1}{\mu}I\right)^{-1}$ موجود $\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{\mu}A^{-1}(A-\mu I)\right)^{-1}$
موجود $\Leftrightarrow -\mu A(A-\mu I)^{-1}$ موجود $\Leftrightarrow (A-\mu I)^{-1}$ موجود $\Leftrightarrow (A-\mu I)^{-1}$ موجود
ومحدود ومعرف على كل الفضاء B $\Leftrightarrow \mu\notin\sigma(A)$ وبالتالي التكافؤ

$\frac{1}{\mu}\notin\sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \mu\notin\sigma(A)$ صحيح وبالتالي التكافؤ التالي صحيح

$\frac{1}{\mu}\in\sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \mu\in\sigma(A)$ وهو المطلوب .

جواب السؤال الرابع (٢٠ درجة):

ليكن $\beta\neq 0$ ، $\lambda=\alpha+i\beta\in\rho(A)$ وبما أن $C=\rho(A)\cup\sigma(A)$ فإذا كان $x\neq 0$ فإن :

$$\langle (A-\lambda I)x,x\rangle = \underbrace{\langle Ax,x\rangle}_{\in R} - \lambda\langle x,x\rangle$$

$$\overline{\langle (A-\lambda I)x,x\rangle} = \langle Ax,x\rangle - \bar{\lambda}\langle x,x\rangle$$

بالطرح نجد : $\overline{\langle (A-\lambda I)x,x\rangle} - \langle (A-\lambda I)x,x\rangle = (\lambda-\bar{\lambda})\|x\|^2 = 2i\beta\|x\|^2$

2

$$-2i\,\mathrm{Im}\langle (A-\lambda I)x,x\rangle = 2i\beta\|x\|^2$$

5

$$|\beta|\|x\|^2 = |\mathrm{Im}\langle (A-\lambda I)x,x\rangle| \le |\langle (A-\lambda I)x,x\rangle| \le \|(A-\lambda I)x\|\|x\|$$

$$|\beta|\|x\| \le \|(A-\lambda I)x\|$$

5

فمن أجل $\beta \neq 0$ ومن المتراجحة الأخيرة يوجد $c=|\beta|>0$ يحقق $c\|x\| \le \|(A-\lambda I)x\|$ وحسب مبرهنة سابقة إذا تحقق هذا الشرط فإن $\lambda \in \rho(A)$. وبالتالي من أجل $\beta = 0$ فإن $\lambda \in \sigma(A)$ وهو المطلوب .

<u>جواب السؤال الخامس (٢٠ درجة) :</u>

5

لنبرهن أن A يطبق ℓ_p في ℓ_q .

$$\|Ax\|_{\ell_q}^q = \sum_{i=1}^{\infty}\left|(Ax)_i\right|^q = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\,\xi_i\right|^q$$

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\,\xi_i\right|^q \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\,|\xi_i|\right)^q \le \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q$$

من هنا نجد أن :

$$\|Ax\|_{\ell_q}^q \le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q \cdot \|x\|_{\ell_p}^q \Rightarrow$$

$$\|Ax\|_{\ell_q} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|x\|_{\ell_p} \quad , \forall x \in \ell_p \qquad (*)$$

أي أن $A : \ell_p \to \ell_q$ وهو مؤثر محدود .

الأن بفرض M مجموعة محدودة في ℓ_p عندئذ يوجد عدد موجب مثل R بحيث يكون :

$$\|x\|_{\ell_p} \le R \quad , \forall x \in \ell_p$$

من العلاقة (*) نجد المتراجحة : $\|Ax\|_{\ell_q} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} .R \quad , \quad \forall x \in M$

أي أن $A(M)$ محدودة في ℓ_q .

نعلم أنه كي تكون M مجموعة شبه متراصة في ℓ_p إذا تحقق :

(١) - M محدودة   (٢)- من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد n_0 بحيث :

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon \quad , \forall x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \ell_p$$

نطبق ذلك على المجموعة $A(M)$ في ℓ_q . أثبتنا أن $A(M)$ محدودة في ℓ_q ، بقي أن نثبت أن $A(M)$ مجموعة متراصة في ℓ_q . أي لنبرهن أن $\varepsilon >$ $\sum_{i=n_0}^{\infty} |(Ax)_i|^q < \varepsilon$ من أجل $\varepsilon > 0$ كيفي .

من تقارب السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q$ ينتج وجود عدد n_0 بحيث يكون : $\sum_{i=n_0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \frac{\varepsilon}{R^q}$

ومنه : $\sum_{i=n_0}^{\infty} |(Ax)_i|^q = \sum_{i=n_0}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_i \right|^q \le \left(\sum_{i=n_0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_i \right) . \|x\|_{\ell_p}^q$

بذلك فإن $\sum_{i=n_0}^{\infty} |(Ax)_i|^q < \frac{\varepsilon}{R^q} R^q = \varepsilon$ أي أن $A(M)$ مجموعة شبه متراصة في ℓ_q .

وبالتالي المؤثر A متراص .

حمص في ٧/ ٩ / ٢٠١٥ م.   انتهت الإجابات   مدرس المقرر

د. سامح العرجة

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الاضافية (مرسوم) ٢٠١٤-٢٠١٥
أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعة و نصف
العلامة:(١٠٠) درجة
الاسم :

السؤال الأول (٢٠ درجة):

أثبت أن كل مجموعة شبه متراصة في فضاء خطي منظم تكون محدودة. أما في الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدودة هي شبه متراصة.

السؤال الثاني (٢٠ درجة) :

لتكن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث :

$$A_n:\ell_2\to\ell_2$$
$$A_n(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n,0,0,0,\dots)$$

أثبت أن هذه المتتالية متراصة ، ولكن نهايتها $\lim_{n\to\infty}A_n$ مؤثر غير متراص .

السؤال الثالث (٢٠ درجة):

ليكن $A:B\to B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء باناخ في نفسه عندئذٍ إذا كان A^{-1} موجوداً ينتمي إلى $L(B,B)$ فعندئذٍ $\sigma(A^{-1})=\left\{\frac{1}{\lambda}\ ;\ \lambda\in\sigma(A)\right\}$.

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

أثبت إذا كان H فضاء هيلبرت وكان $A:H\to H$ مؤثر خطي ومحدود ومترافق ذاتياً فإن طيفه حقيقي أيضاً أي $\sigma(A)\subset R$.

السؤال الخامس (٢٠ درجة):

ليكن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\ ;p>1$ ولنأخذ المؤثر : $(Ax)_i=\sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ij}\,\xi_j$ حيث $x=(\xi_1,\xi_2,\dots)$ عنصراً من ℓ_p وأما المصفوفة العددية (a_{ij}) ، $(i,j=1,2,\dots)$ فهي بحيث إن المتسلسلة $\sum_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q$ متقاربة . برهن أن المؤثر A متراص.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر
الدكتور سامح العرجة

حمص في ٧/ ٩ / ٢٠١٥ م. مع التمنيات بالنجاح والتوفيق